In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful

LA FACULTÉ

SEEK KNOWLEDGE

Copyright disclaimer

"La faculté" is a website that collects copyrights-free medical documents for non-lucratif use.
Some articles are subject to the author's copyrights.
Our team does not own copyrights for some content we publish.
"La faculté" team tries to get a permission to publish any content; however , we are not able to contact all the authors.
If you are the author or copyrights owner of any kind of content on our website, please contact us on: facadm16@gmail.com
All users must know that "La faculté" team cannot be responsible anyway of any violation of the authors' copyrights.
Any lucrative use without permission of the copyrights' owner may expose the user to legal follow-up.

Chapitre 2: Analyse combinatoire (dénombrement)

I/ Principe fondamental de l'analyse combinatoire:

Expérience 1 → n_1 résultats.

Expérience 2 → n_2 résultats

⋮

Expérience k → n_k résultats.

Expérience globale → $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ résultats différents.

II/ Arrangements:

1/ Arrangements sans répétition:

• Déf: On appelle arrangement sans répétition de p éléments pris parmi n ($p \leqslant n$), toute suite ordonnée de ces p éléments, tous différents.

ex: n=3 A B C

p=1 AB AC BA BC CA CB

Il y a 6 arrangements.

n=4 A B C D

p=2 → 12 arrangements.

p=3 → ABC ABD ACD ACB ADB ADC) 6

... B) 6

... C) 6

... D) 6

• Le nbre d'arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n est donné par:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

N.B.:

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$.

$1! = 1$

$0! = 1$

ex1: n=3, p=2 $\quad A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3! = 6$

ex2: n=4, p=2 $\quad A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1\times2\times3\times4}{1\times2} = 12$

ex3: n=4, p=3 $\quad A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$.

2/ Arrangements avec répétition:

• Déf: un arrangement avec répétition de p éléments choisis parmi n non tous différents, est une suite ordonnée de ces p éléments

• Le nbre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n est donné par: $\alpha_n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$

III/ Permutations:

1/ Sans répétition:

• Déf: une permutation d'ordre n est un arrangement de n parmi n.

• Le nbre de permutations d'ordre n est donné par: $P_n = n!$

2/ Avec répétition :

• Déf:

Soit E un ensemble à n éléments non tous différents composé de k groupes tels que les éléments d'un même groupe sont identiques et en nbre n_i $(i = 1, \dots k)$. $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$ alors, le nbre de façon de former des permutations d'ordre avec répétitions $n_1, n_2 \dots n_k$ est donné par:

$$P_{n(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_k!}$$

ex: un ensemble composé de 2 boules blanches et d'une boule rouge.

- Combien de permutations a-t-on si : a/ Les boules de même couleur sont numérotées.

b/ Les boules de même couleur sont identiques

a/ $E = \{B_1, B_2, R\}$ $|E| = n = 3$.

$P_n = n! = 3! = 6$.

$B_1 B_2 R \overset{=}{,} B_2 B_1 R, \; B_1 R B_2 \overset{=}{,} B_2 R B_1,$

$R B_1 B_2 \overset{=}{,} R B_2 B_1$. 2 fois moins de possibilités

b/ $E = \{B, B, R\} = \{2B, 1R\}$

$P_{3(2,1)} = \frac{3!}{2!1!} = 3.$

ex2: $E = \{2R, 3V, 2J, 1N\}$ $|E| = 8$

$P_{8(2,3,2,1)} = \frac{8!}{2!3!2!1!} = 1680$

N.B:

On peut noter :

$$P_{n(n_1, n_2, \dots, n_k)} \equiv \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \equiv C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

est aussi appelé multinôme.

IV/ Combinaisons:

1/ Sans répétition :

• Déf: une combinaison de p éléments choisis parmi n tous différents $(p \leq n)$ est une suite non ordonnée de ces p éléments.

• Le nbre de combinaisons de p parmi n est donné par: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$

ex: $E = \{a, b, c\}$ $|E| = 3$ $p = 2$

- arrangement: R $|R| = A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

$R = \{(a,b) \overset{=}{(b,a)} (a,c) \overset{=}{(c,a)} (b,c) \overset{=}{(c,b)}\}$

- combinaison: $R = \{(a,b)(a,c)(b,c)\}$

$|R| = \frac{6}{2} = 3 = \frac{3!}{2!1!} = C_3^2$

N.B.: $C_n^p = C_n^{p, n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$